Лабораторная работа №8

Итерационные методы в вычислительных процессах с использованием функций на примере приближенного вычисление корня уравнения с заданной точностью методом половинного деления (МПД)

1. ***Цель работы:***

1.1 Изучение практической схемы вычисления приближенного значения корней нелинейных и трансцендентных уравнений.

1.2 Используя функции, приближенно вычислить корень данного уравнения $f(x)=0$ с заданной погрешностью ε.

Задание

Вычислить наименьший положительный корень заданного уравнения с точностью $e=10^{-3}$. Работу провести в два этапа:

I Этап -решение для тестового примера: $x^3-1=0$

1) Провести отделение корней уравнения (найти наименьший положительный или отрицательный корень)

2) Вычислить приближенное решение методом половинного деления.

Уравнение $f(x)=0$ и МПД оформить функцией. Для МПД передать в качестве параметров: значения границ интервала, заданную точность и указатель на функцию

II Этап – добавить к I Этапу решение по индивидуальному заданию

По итогам выполнения заданий представить *корень уравнения, вычисленный с указанной точностью и количество итераций,* необходимых для достижения заданной точности

Номер варианта соответствует порядковому номеру в списке(Табл.1)

Теоретические сведения

Итерационные методы решения нелинейных и трансцендентных уравнений.

Итерационный процесс состоит в последовательном уточнении начального приближения $x0$. Каждый такой шаг называется *итерацией*. В результате итераций находится последовательность приближенных значений корня $x1$, $x2$,..., xn. Если эти значения с увеличением числа итераций n приближаются к истинному значению корня, то говорят, что итерационный процесс *сходится*.

Краткая теория метода половинного деления

Задача нахождения корней нелинейного уравнения с одной переменной может быть решена точно лишь для очень узкого класса функций. Уже для многочленов степени выше четырех не существует формул, выражающих их корни через коэффициенты с помощью радикалов. Для большинства же уравнений, встречающихся в различных приложениях математики и технических задачах, приближенные методы решения являются единственно возможными.

Приближенное решение уравнения распадается на несколько задач:

1) Локализация и отделение корня.
2) Вычисление корня уравнения с заданной точностью ε.

Локализация корней — необходимо определить количество, характер и расположение корней на числовой прямой. Все следующие задачи решаются для каждого корня в отдельности. Отделение корня — нужно указать отрезок $[a,b]$, внутри которого лежит один и только один корень данного уравнения. Локализация и отделение корня возможно выполнять графически или аналитически опираясь на теорему: *Если непрерывная функция $f(x)$ на концах отрезка $[a,b]$ принимает значения разных знаков $f(a)\cdot f(b)<0$, а первая производная постоянна по знаку, то на этом отрезке существует ровно одна точка, в которой функция обращается в ноль.*

Вычислить корень $\bar{x}$ с заданной точностью ε значит подобрать такое число $\tilde{x}$, для которого выполняется неравенство $|\bar{x} - \tilde{x}| < \varepsilon$, то есть указать на числовой прямой точку, лежащую на расстоянии не большем, чем допустимая погрешность, от точного значения корня. Вычисление корня уравнения с заданной точностью ε может быть выполнено различными методами.

В общем случае нелинейное уравнение можно записать в виде

$F(x) = 0$, (1)

где функция $F(x)$ определена и непрерывна на конечном или бесконечном интервале $[a, b]$. Примерами трансцендентных уравнений являются уравнения

$x^2 - \sin x = 0; \quad \mathrm{tg}(x-6) = 3^x$.

<u>Определение 1</u>. Число x^* , такое, что $F(x^*) = 0$ называется корнем уравнения (1).

На практике такие уравнения решаются численными методами, вместо точного решения x^* вычисляется приближенное решение:

<u>Определение 2</u>. Число $\tilde{x}$, такое, что $|x^* - \tilde{x}| \leq \varepsilon$ называется приближенным решением уравнения (1), найденным с точностью ε >0.

Задача численного нахождения приближенных корней включает в себя:

Задача 1: отделение корней.

1.1. Графическое отделение корней.

Для того чтобы провести графическое отделение корней, надо построить график функции $y = F(x)$ и визуально определить интервал, на котором находится ровно один корень уравнения.

1.2. Примерный алгоритм отделения корней аналитически:

1. Задается отрезок [a,b], на котором необходимо отделить корни функции f(x).

2. Задается начальное значение n и строится сетка $x_i = a + ih$, $h = \frac{b - a}{n},\ i = 0,1,2,...n$. Сетка делит отрезок на n частей с помощью n+1 точки.
3. Вычисляется значение функции ***f(x$_i$)=f$_i$*** и вычисляется произведение значений функции на концах отрезка $f_i \cdot f_{i+1}$, i = 0,1,2,…n+1.
4. Подсчитываем количество отрицательных произведений и запоминаем отрезки, где произведение отрицательно или равно 0. Число таких отрезков k. Каждый из таких отрезков должен содержать хотя бы 1 корень.
5. Увеличиваем n в два раза и повторяем процедуру. Получаем новое количество отрезков (корней) k_1.
6.

$$\begin{cases} k < k_1 \Rightarrow k = k_1 \text{ и повторяем п.5} \\ k = k_1 \Rightarrow \text{выход} \end{cases}$$

Если количество отрезков не изменилось, процесс прекращается.
Данный алгоритм теоретически может пропустить корень, но практика показала его эффективность и достаточную точность.

Задача 2:

Уточнение корня методом половинного деления.

Основная идея нахождения приближенного решения заключается в сокращении первоначального интервала, определенного при отделении корней, до интервала длиной *e*. После того, как удалось сократить интервал до заданной величины, можно определить $\bar{x} = (a + b)/2$. В этом случае условие $|x^* - \bar{x}| \le \varepsilon$ выполнено.

В методе половинного деления сокращение интервала происходит делением отрезка $[a, b]$ пополам и выбора той из половин, которой принадлежит искомый корень уравнения.

Итак, алгоритм численного решения уравнения (1) методом половинного деления заключается в выполнении следующих шагов:

1. определить начальный отрезок $[a, b]$;

2. найти точку с – середину отрезка $[a, b]$, $c = (a + b)/2$;

3. проверить, какому из отрезков $[a, c]$ или $[c, b]$ принадлежит корень. Легко видеть, что проверка выполняется так:

если $f(a)f(c) < 0$, то корень принадлежит отрезка $[a, c]$ и в дальнейшем надо положить $b = c$, в противном случае корень принадлежит отрезку $[c, b]$ и следует положить $a = c$;

4. если длина отрезка $[a, b]$ больше *e*, то перейти к пункту 2;

5. закончить вычисления, положив $\tilde{x} = (a+b)/2$.

Индивидуальное задание.

Варианты функции f(x) и интервал к Заданию (Табл.1):

1.	$2 - \lg x - x = 0$	[1; 2]
2.	$e^x + x - 2 = 0$	[0; 1]
3.	$2^x - x - 3 = 0$	[2; 3]
4.	$x + \ln x = 0$	[0,5; 1,5]
5.	$\sqrt{x} - \cos(0{,}378 \cdot x) = 0$	[0,5; 1]
6.	$\mathrm{tg}(0{,}5x + 0{,}1) = x^2$	[0; 1]
7.	$x^3 - 6x + 2 = 0$	[2,3]
8.	$x^5 - x - 0{,}2 = 0$	[1; 2]
9.	$x^5 + x^4 + x - 1 = 0$	[0; 1]
10.	$x^5 - 10x + 128 = 0$	[–3; 2]
11.	$\mathrm{tg}x - x = 0$	[3; 4,6]
12.	$x - \sin x - 0{,}25 = 0$	[0; 1,5]
13.	$\sin x + \cos 2x = 0$	[2; 4]
14.	$2x - e^{-0{,}1x} = 0$	[0,2; 1,5]
15.	$x + \ln x - 0{,}125e^x = 0$	[2,8; 4]
16.	$x^7 - 2x^6 + 7x - 8 = 0$	[0; 2]
17.	$x^9 - 2x^8 + 9x - 10 = 0$	[1; 2]
18.	$2x^3 - 3x^2 - 12x - 5 = 0$	[-1; 0]
19.	$x^3 - 12x + 6 = 0$	[0; 1]
20.	$3x + \cos x + 1 = 0$	[-1; 0]
21.	$x^3 + 3x - 1 = 0$	[0; 2]
22.	$x^3 - 5x^2 + 12$	[–2; 0]